1- أ- لنبين أن المعادلة P(z)=0 تقبل حلا تخيليا صرفا

ليكن bi عددا تخيليا صرفا $\left(b \in IR\right)$

لدينا : $P\left(bi\right)=0 \Leftrightarrow 2(bi)^3-(4+i)(bi)^2+(4+2i)bi-2i=0$

$\Leftrightarrow -2b^3i+(4+i)b^2+(4+2i)bi-2i=0$

$\Leftrightarrow (4b^2-2b)+i(-2b^3+b^2+4b-2)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4b^2-2b=0 \\ -2b^3+b^2+4b-2=0 \end{cases}$$

(لأن $(4b^2-2b)\in IR$ و $(-2b^3+b^2+4b-2)\in IR$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \quad \text{أو} \quad b=\frac{1}{2} \\ -2b^3+b^2+4b-2=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow b=\frac{1}{2}$

وبالتالي فإن المعادلة p(z)=0 لها حل تخيلي صرف هو $\frac{1}{2}i$

ب- التحقق من المتساوية

: $(2z-i)(z^2-2z+2)=2z^3-4z^2+4z-iz^2+2iz-2i$

$=2z^3-(4+i)z^2+(4+2i)z-2i$

$=P(z)$

ج- حل المعادلة $p(z)=0$

لدينا : $p(z)=0 \Leftrightarrow 2z-i=0$ أو $z^2-2z+2=0$

$\Leftrightarrow z=\frac{1}{2}i$ أو $z^2-2z+2=0$

المميز المختصر للمعادلة $z^2-2z+2=0$

هو : $\Delta'=1-2$

$=-1=i^2$

ومنه فإن حلاها هما $1+i$ و $1-i$

إذن مجموعة حلول المعادلة P(z)=0 هي :

$$S=\left\{\frac{1}{2}i,1-i,1+i\right\}$$

2- أ- كتابة z_1 و z_2 على الشكل المثلثي:

* لدينا : $z_1=1+i$

$=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]$

* لدينا : $z_2=1-i$

$=\overline{z_1}=\overline{\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]}=\left[\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\right]$

ب – عمدة للعدد $\frac{z_1^n}{z_2}$

$$\frac{z_1^n}{z_2}=\frac{\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]^n}{\left[\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\right]}$$

$$=\frac{\left[(\sqrt{2})^n,\frac{n\pi}{4}\right]}{\left[\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\right]}$$

$$=\left[(\sqrt{2})^{n-1},\frac{n\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right]$$

إذن عمدة للعدد $\frac{z_1^n}{z_2}$ هي : $\frac{\pi}{4}(n+1)$

*** استنتاج قيم n التي من أجلها تكون O وA و B مستقيمية**

تكون النقط O وA وB مستقيمية إذا وفقط إذا كان :

$$\frac{z_A-0}{z_B-0}\in IR$$

أي إذا وفقط إذا كان : $\arg\frac{z_A}{z_B}=k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

ولدينا : $\arg\frac{z_A}{z_B}=\arg\frac{z_1^n}{z_2}$

$$=\frac{\pi}{4}(n+1)$$

إذن OوAوB مستقيمية إذا وفقط إذا كان :

$(n+1)\frac{\pi}{4}=k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

أي إذا وفقط إذا كان : $n=4k-1$ حيث $k\in\mathbb{Z}$